

Lista nr 5

Poziom rozszerzony

Zad. 1 (2 pkt.) W urnie z czarnymi i białymi kulami jest trzy razy więcej kul białych niż czarnych. Oblicz, ile jest kul w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo wylosowania kul o różnych kolorach jest większe od $9/22$.

Zad. 2 (2 pkt.) Dla jakich wartości parametru m równanie

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$$

opisuje okrąg? Podaj współrzędne środka i długość promienia okręgu. Dla jakich wartości parametru m okrąg ten jest styczny do prostej o równaniu $x = 4$?

Zad. 3 (2 pkt.) Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} < \sqrt{4x+5}.$$

Zad. 4 (2 pkt.) Rozwiąż równanie

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

Zad. 5 (2 pkt.) Korzystając z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu dowieść niewymierności liczby $\sqrt[3]{6}$.

Zad. 6 (3 pkt.) Udowodnij, że równanie

$$x^4 + x^3 + x^2 - 3 = 0$$

ma tylko jeden pierwiastek będący liczbą wymierną.

Zad. 7 (2 pkt.) Oblicz objętość sześcianu, jeżeli odległość wierzchołka sześcianu od jego przekątnej (nie zawierającej tego wierzchołka) jest równa 4.

Zad. 8 (2 pkt.) Dany jest trzywyrazowy rosnący ciąg geometryczny, którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz środkowy danego ciągu geometrycznego.

Zad. 9 (3 pkt.) Ewa przeczytała książkę, która miała 572 strony. Każdego dnia czytała o taką samą liczbę stron więcej, niż w dniu poprzednim. W ile dni Ewa przeczytała tę książkę, jeżeli w trzecim dniu przeczytała 28 stron, a w ostatnim 68?

Zad. 10 (3 pkt.) Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o ramionach długości a . Pole podstawy jest równe sumie pól dwóch przystających ścian bocznych graniastosłupa. Jakie powinny być długości pozostałych krawędzi graniastosłupa, aby jego objętość była największa?

Zad. 11 (4 pkt.) W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są

$$|\angle ADC| = |\angle ABC| = 90^\circ, \quad |\angle DCB| = 135^\circ.$$

Wykaż, że $\frac{|DB|}{|AC|} = \sqrt{2}/2$.